

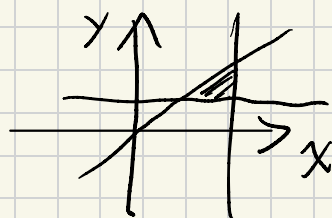
$$\iint_D xy \, d\sigma$$

D 为 $y=1$ $x=4$ $x=2y$ 围绕区域 (解出交点)

$$d\sigma \Leftrightarrow dx dy$$

若以 x 为标准, 则 y 用 x 描述

$$dV \Leftrightarrow dx dy dz$$



$$\begin{cases} x \in [2, 4] \\ y \in [1, \frac{x}{2}] \end{cases} \quad \iint_D xy \, d\sigma = \int_2^4 \int_1^{\frac{x}{2}} xy \, dy \, dx$$

计算方法, 先算内层的 $\int_1^{\frac{x}{2}} x \cdot y \, dy$ x 视为常数

$$= x \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_1^{\frac{x}{2}}$$

再算外层的

如何书写上下限

若以 y 为标准, 则 x 用 y 描述 $\begin{cases} x \in [2y, 4] \\ y \in [1, 2] \end{cases}$...

常见寻找上下限: 解所有交点

如 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 计算 $\iint_D (xy + x) \, d\sigma$

以 x 为标准

$$x \in [-1, 1]$$

$$y^2 \leq 1 - x^2$$

$$y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (xy + x) \, dy \, dx$$

...

eg1: 开形如 $\int F(x) G(y) \, dx dy$ 可分离类型且 x, y 无关

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 \cdot y \, dy \, dx = \int_1^2 x^2 \, dx \cdot \int_0^3 y \, dy \quad \dots$$

eg2: 不可分离类型

如 $\int_0^1 \int_0^x (xy^2 + xy) \, dy \, dx$

先对内层积分

这里对 dy 则 x 视为常数

$$= \int_0^1 [x \cdot \frac{1}{3} y^3 + x^2 \cdot \frac{1}{2} y^2] \Big|_0^x \, dx = \dots \quad \text{分层}$$

如果 D 的区域存在 $x^2 + y^2 = C$ 或 $C(x)/C(y)$ 形式

可换元 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \Rightarrow dx dy = \rho d\rho d\theta$

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_{\rho\theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho d\theta$$

eg3: $\iint_D 3xy \, d\sigma$

D为 $y=x$ $x=0$ $x^2+y^2=4y$ $x^2+y^2=2x$
 包围区域 (交点可解)

A: $4\sin\theta$ B: $2\sin\theta$

$\rho \in [2\sin\theta, 4\sin\theta]$

$\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 这里的 ρ 由 θ 描述

$\iint_D 3xy \, dx \, dy \xrightarrow{x=\rho\cos\theta \quad y=\rho\sin\theta} \iint_D 3\rho^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \rho \, d\rho \, d\theta$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} 3\rho^3 \sin\theta \cos\theta \, d\rho \, d\theta = \dots$

In General:

用 x 为标佳, y 用 x 描述 (或反之) 可以解决一切双重积分
 选择上下限时可先解出交点然后作图

如果 x^2+y^2 有关系则考虑 $x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\sin\theta$ 换元

对称性/奇偶性可简化但不强求

若式子很丑可尝试是否在区域里对称/奇偶
 很多 (去年有考过)